ΦΥΣΙΚΗ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

4ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

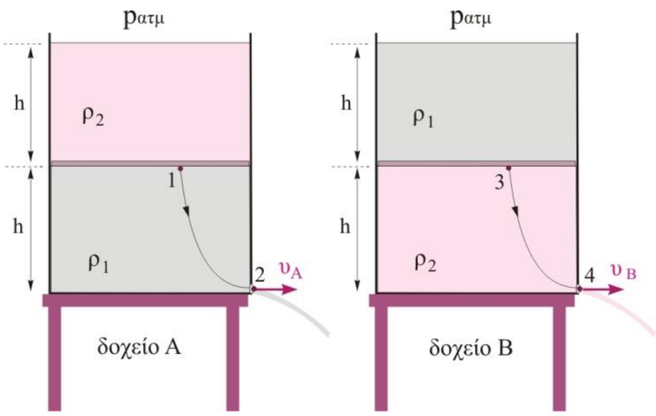
ΘΕΜΑ Α

Α1α. (γ)   Α1β. (β)
Α2α. (β)   Α2β. (γ)
Α3α. (γ)   Α3β. (δ)
Α4α. (δ)   Α4β. (α)
Α5. α.Σ   β.Λ   γ.Σ   δ.Σ   ε.Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (α).
Με κλειστό το άκρο Γ του σωλήνα, έχουμε υγρό σε ισορροπία και η πίεση στο άκρο Γ είναι $p_1= p_{atm}+\rho gH$.
Ανοίγοντας το άκρο Γ του οριζόντιου σωλήνα, το νερό βρίσκεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα με αποτέλεσμα η πίεση στο Γ να γίνει ίση με $p_2=p_{atm}$.
Επομένως η πίεση μεταβλήθηκε κατά $\Delta p= p_2 - p_1=-\rho gH$.

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).



Για το δοχείο Α
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

$$p_1+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^{\,2}+\rho_1 gh=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_A^2$$

Για το σημείο 1 που βρίσκεται κάτω από το διάφραγμα ισχύει $p_1=\rho_2 gh+p_{\alpha\tau\mu}$ και $\upsilon_1=0$ αφού η επιφάνεια βάσης του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερη αυτής της οπής.
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Bernoulli παίρνουμε $\left(\rho_1+\rho_2\right)gh=\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_A^2 \quad (1)$

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για το δοχείο Β.
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 3 και 4 της ίδιας ρευματικής γραμμής.

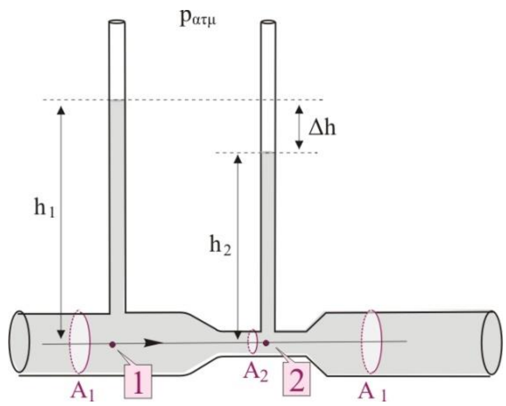
$$p_3+\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_3^{\,2}+\rho_2 gh=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_B^2$$

Για το σημείο 3 που βρίσκεται κάτω από το διάφραγμα ισχύει $p_3=\rho_1 gh+p_{\alpha\tau\mu}$ και $\upsilon_3=0$, αφού η επιφάνεια βάσης του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή της οπής.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Bernoulli παίρνουμε $\left(\rho_1+\rho_2\right)gh=\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_B^2$, (2)

Συγκρίνοντας τις (1),(2) παίρνουμε $\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_A^2=\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_B^2$ ή $4\upsilon_A^2=\upsilon_B^2$ ή $\upsilon_B=2\upsilon_A$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (γ).
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για τα σημεία 1 και 2 της ίδιας οριζόντιας ρευματικής γραμμής.



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^{\ 2} = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^{\ 2} \qquad (1)$$

όπου $p_1=\rho g h_1+p_{ατμ}$, (2) και
$p_2=\rho g h_2+p_{ατμ}$, (3)
Αντικαθιστώντας τις (2), (3) στην (1) παίρνουμε

$$\rho g h_1 + p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^{\ 2} = \rho g h_2 + p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^{\ 2} \quad ή \quad \rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^{\ 2} - \upsilon_1^{\ 2}\right) \quad ή$$

$$2g\cdot\Delta h = \upsilon_2^{\ 2} - \upsilon_1^{\ 2} \quad ή \quad \Delta h = \frac{\upsilon_2^{\ 2} - \upsilon_1^{\ 2}}{2g}$$

Αν η παροχή διπλασιαστεί, θα διπλασιαστεί το μέτρο των ταχυτήτων υ_1 , υ_2 και η διαφορά ύψους θα γίνει

$$\Delta h' = \frac{\left(2\upsilon_2\right)^2 - \left(2\upsilon_1\right)^2}{2g} = \frac{4\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{2g} \quad ή \quad \Delta h' = 4\Delta h$$

Β4. Σωστή απάντηση είναι η (β).
Η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β ισούται με το άθροισμα των μεταβολών της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας και της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου.

$$\frac{\Delta E_{πρ}}{\Delta V} = \frac{\Delta U}{\Delta V} + \frac{\Delta K}{\Delta V}$$

Επομένως, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου είναι

$$\frac{\Delta K}{\Delta V} = \frac{\Delta E_{πρ}}{\Delta V} - \frac{\Delta U}{\Delta V}$$

Από την εκφώνηση, η προσφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου για τη μετακίνηση του υγρού από το τμήμα Α στο τμήμα Β είναι μικρότερη από την προκαλούμενη αύξηση της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του υγρού, άρα

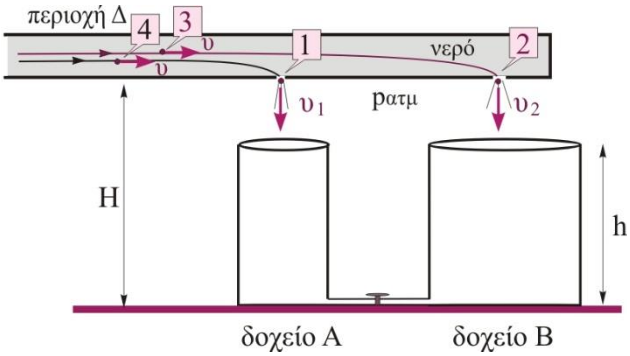
$$\frac{\Delta K}{\Delta V} < 0 \quad ή \quad K_2 < K_1 \quad ή \quad \upsilon_2 < \upsilon_1$$

Εφόσον η παροχή διατηρείται σταθερή ισχύει

$$\Pi_A = \Pi_B \quad ή \quad A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \quad ή \quad A_2 > A_1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli για δύο σημεία μιας ρευματικής γραμμής που διέρχεται από την εσωτερική περιοχή Δ του σωλήνα, σημείο 3 και από το σημείο 2, όπου η φλέβα νερού εξέρχεται στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα μέτρου υ_2.



$$p_3+\frac{1}{2}\rho\upsilon_3^{\,2}+\rho gH=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^{\,2}+\rho gH \Rightarrow \quad p_3+\frac{1}{2}\rho\upsilon_3^{\,2}=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^{\,2} \quad (1)$$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο για τη ρευματική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία 4 και 1 (βλέπε σχήμα).

$$p_4+\frac{1}{2}\rho\upsilon_4^{\,2}+\rho gH=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^{\,2}+\rho gH \Rightarrow \quad p_4+\frac{1}{2}\rho\upsilon_4^{\,2}=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^{\,2} \qquad (2)$$

Στην περιοχή Δ οι πιέσεις στα σημεία 3 και 4 είναι ίδιες, επομένως, συγκρίνοντας τις (1) και (2) , προκύπτει ότι $\upsilon_1=\upsilon_2=10m/s$.

Γ2) Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του νερού στα σημεία εκροής του από τις τρύπες δίνεται από τη σχέση

$$\frac{K}{\Delta V}=\frac{\frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon^2}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\upsilon^2=\frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(10\frac{m}{s}\right)^2 \quad ή \quad \frac{K}{\Delta V}=50.000\frac{J}{m^3}$$

Γ3) Η παροχή του σωλήνα είναι σταθερή, επομένως σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\Pi_3=\Pi_1+\Pi_2 \quad ή \quad A\upsilon_\Delta=A_1\upsilon_1+A_2\upsilon_2 \quad ή$$

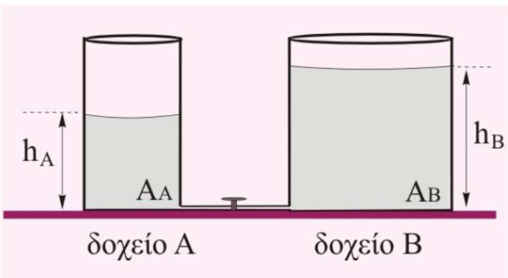
$$\upsilon_\Delta=\frac{A_1\upsilon_1+A_2\upsilon_2}{A}=\frac{\left(10\cdot10^{-4}m^2+20\cdot10^{-4}m^2\right)10\frac{m}{s}}{600\cdot10^{-4}m^2} \quad ή \quad \upsilon_\Delta=0,5\frac{m}{s}$$

Η πίεση στο Δ (p_3) θα υπολογιστεί από τη σχέση (1)

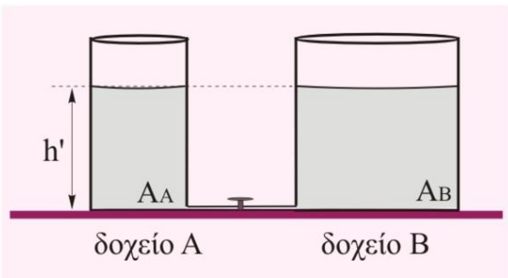
$$p_3=p_{\alpha\tau\mu}+\frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^{\,2}-\upsilon_3^{\,2}\right)=100.000\frac{N}{m^2}+\frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}\left(\left(10\frac{m}{s}\right)^2-\left(0,5\frac{m}{s}\right)^2\right) \quad ή$$

$$p_3=149.875\frac{N}{m^2}$$

Γ4) Η αιτία κίνησης των ρευστών είναι η διαφορά πίεσης. Η ροή του νερού από το ένα δοχείο προς το άλλο θα σταματήσει όταν οι πιέσεις εκατέρωθεν του διακόπτη γίνουν ίσες. Αυτό θα συμβεί όταν η ελεύθερες στάθμες του νερού στα δύο δοχεία φθάσουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.



πριν το άνοιγμα του διακόπτη



μετά το άνοιγμα του διακόπτη

Αρχικά, βρίσκουμε το ύψος του νερού στο δοχείο Β , όταν στο πρώτο δοχείο είναι h_A=1,2m.
Αν με V_A, V_B, συμβολίσουμε τον όγκο νερού που συλλέγεται αντίστοιχα στα δοχεία Α και Β , τότε για το λόγο τους ισχύει:

$$\frac{V_B}{V_A}=\frac{\Pi_B\,\Delta t}{\Pi_A\,\Delta t}=\frac{A_2\,\upsilon_2}{A_1\,\upsilon_1}\Rightarrow\ \frac{V_B}{V_A}=2\quad\Rightarrow\frac{A_B h_B}{A_A h_A}=2\Rightarrow\frac{1,5A_A h_B}{A_A h_A}=2\Rightarrow$$

$$h_B=\frac{2}{1,5}h_A=\frac{2}{1,5}1,2m\Rightarrow h_B=1,6m$$

Αν με m_A, m_B, συμβολίσουμε τις μάζες νερού που συλλέγονται αντίστοιχα στα δοχεία Α και Β και m'_A, m'_B τις μάζες νερού που αποκτούν τελικά τα δοχεία, τότε από την αρχή διατήρησης της ύλης μπορούμε να γράψουμε:

$$m_A+m_B=m'_A+m'_B\quad\Rightarrow\rho V_A+\rho V_B=\rho V'_A+\rho V'_B\quad\Rightarrow$$

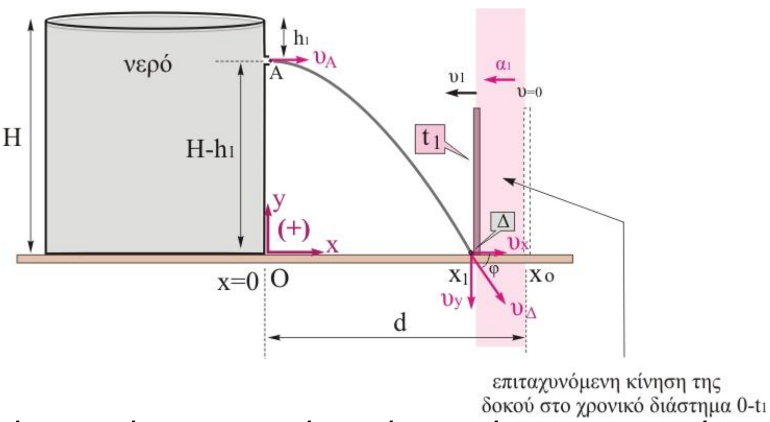
$$A_A h_A+A_B h_B=A_A h'+A_B h'\Rightarrow h'=\frac{A_A h_A+A_B h_B}{A_A+A_B}=\frac{A_A h_A+1,5A_A h_B}{A_A+1,5A_A}\Rightarrow$$

$$h'=\frac{h_A+1,5h_B}{1+1,5}=\frac{1,2m+1,5\cdot 1,6m}{2,5}\Rightarrow h'=1,44m$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Όταν η τάπα αφαιρεθεί, το νερό που θα βγει από την οπή θα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος H-h_1 με ταχύτητα υ_A της οποίας το μέτρο βρίσκεται από το θεώρημα Torricelli (το ύψος του νερού στη δεξαμενή παραμένει σταθερό).

Προκύπτει $\upsilon_A=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5m}$ ή $\upsilon_A=10\frac{m}{s}$



Όταν το νερό φθάνει στο έδαφος, σημείο Δ, έχει ταχύτητα που προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων του στους δύο άξονες.
Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς xOy, που έχει x=0, y=0 το σημείο Ο που βρίσκεται στη βάση της δεξαμενής και είναι πλησιέστερα προς την κατακόρυφη δοκό.
Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της 1ης σταγόνας νερού που εξέρχεται από την οπή γράφονται:

Άξονας Ox: $\upsilon_x=\upsilon_A$=10m/s (1)
$x=\upsilon_A t$ ή x= 10t (SI) (2)

Άξονας Oy: υ_y= -gt ή υ_y= -10t (SI) (3)

$$y=(H-h_1)-\frac{1}{2}gt^2\quad ή\quad y=20-5t^2\ \ (SI)\qquad (4)$$

Όταν το νερό φθάνει στο έδαφος έχει y=0, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (4) y=0 βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 που η 1η σταγόνα φθάνει στο έδαφος.

Προκύπτει, $0 = 20 - 5t_1^2 \Rightarrow t_1 = 2s$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) βρίσκουμε την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας ελάχιστα πριν φθάσει στο έδαφος.
Προκύπτει, $\upsilon_y = -20$ m/s

Το μέτρο της ταχύτητας της φλέβας λίγο πριν κτυπήσει στο δάπεδο, σημείο Δ, είναι

$$\upsilon_\Delta = \sqrt{\upsilon^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\left(10\frac{m}{s}\right)^2 + \left(20\frac{m}{s}\right)^2} \quad ή \quad \upsilon_\Delta = \sqrt{5}\cdot 10\frac{m}{s}$$

με κατεύθυνση που σχηματίζει με το οριζόντιο δάπεδο γωνία φ για την οποία ισχύει:

$$εφφ = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = -2$$

Δ2. Από την εξίσωση συνέχειας, για τη φλέβα νερού έχουμε

$$\Pi = σταθ \quad ή \quad A_{οπ}\cdot\upsilon = A\cdot\upsilon_\Delta \quad ή \quad A = \frac{A_{οπ}\cdot\upsilon}{\upsilon_\Delta} = \frac{\sqrt{5}\cdot 10^{-4}m^2\cdot 10\frac{m}{s}}{\sqrt{5}\cdot 10\frac{m}{s}} \quad ή$$

$$A = 10^{-4}m^2$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t_o=0$ που αφαιρούμε την τάπα, η δοκός ξεκινά από τη θέση $x_o=24m$ και τη στιγμή $t_1=2s$ φτάνουν ταυτόχρονα στο σημείο Δ (θέση x_1) η πρώτη σταγόνα και η βάση της δοκού.

Η θέση x_1 αντιστοιχεί στην οριζόντια μετατόπιση της σταγόνας και βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (2), $t=t_1=2s$.

$$x_1 = 10\cdot t_1 = 10\frac{m}{s^2}\cdot 2s \quad ή \quad x_1 = 20m$$

Η δοκός στο ίδιο χρονικό διάστημα (0s-2s) εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και η κίνησή της περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$\upsilon_{δοκ} = \alpha_1\cdot t \quad 0s \le t \le 2s \qquad (5)$$

$$x_\delta = x_o + \frac{1}{2}\alpha_1\cdot t^2 \;\; ή \;\; x_\delta = 24 + \frac{1}{2}\alpha_1\cdot t^2 \text{ (SI) με } \; 0s \le t \le 2s \qquad (6)$$

Η επιτάχυνση α_1 βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (6), $x_\delta = x_1 = 20m$ και $t=t_1=2s$, προκύπτει,

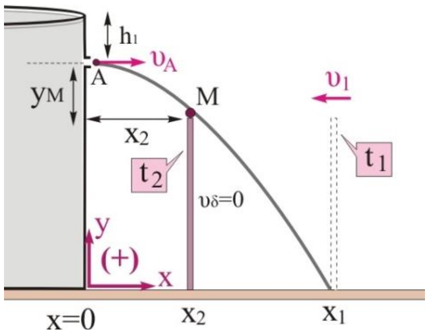
$$20m = 24m + \frac{1}{2}\alpha_1\cdot(2s)^2 \quad ή \quad \alpha_1 = -2\frac{m}{s^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης.

Δ4. Τη στιγμή t_1 η δοκός έχει αποκτήσει ταχύτητα, υ_1, που βρίσκεται από τη σχέση (5), αν αντικαταστήσουμε $t=t_1=2s$ και $\alpha_1 = -2\frac{m}{s^2}$, προκύπτει

$$\upsilon_{δοκ} = \alpha_1\cdot t \Rightarrow \upsilon_1 = -2\frac{m}{s^2}\cdot 2s \quad ή \quad \upsilon_1 = -4\frac{m}{s}$$

Από τη στιγμή t_1 και μετά η δοκός επιβραδύνεται ομαλά και σταματά τη χρονική στιγμή t_2 στη θέση x_2 όπου η φλέβα νερού περνά οριακά πάνω από ψηλότερο σημείο της σημείο Μ, (βλέπε σχήμα).



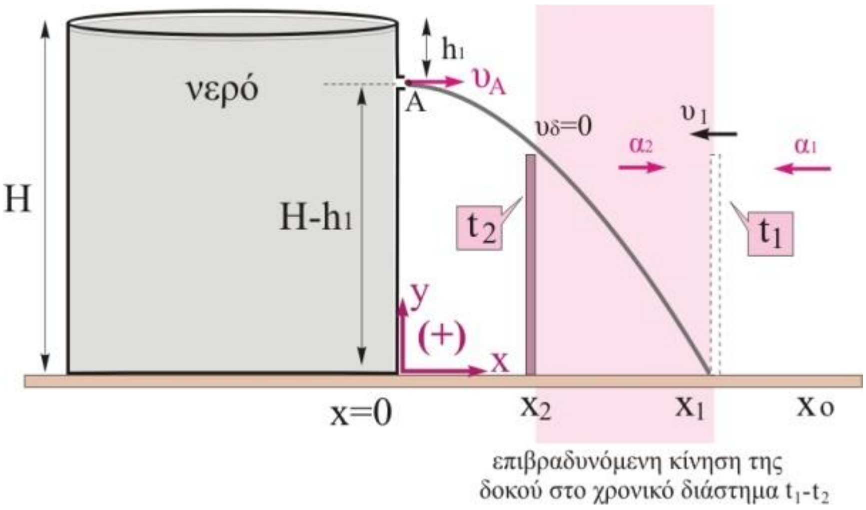
Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες,
$x_M = x_2$ και $y_M = h_{δοκού} = 15m$

Από την εξίσωση τροχιάς της φλέβας νερού, υπολογίζουμε την απόσταση x_2 .

Ο συνδυασμός των σχέσεων (2) και (4) δίνει:

$$y = 20 - 5\left(\frac{x}{10}\right)^2 \Rightarrow y = 20 - \frac{5}{100}x^2$$

Και με αντικατάσταση, y= $y_M = h_{δοκού} = 15m$ προκύπτει $15 = 20 - \frac{5}{100}x_2^2 \Rightarrow \ x_2 = 10m$



Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση της δοκού στη φάση της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι

$$υ_{δοκ} = υ_1 + α_2 Δt \quad ή \quad υ_{δοκ} = -4 + α_2(t-2) \ (SI) \qquad (7)$$

$$x_δ = x_1 + υ_{δοκ} \cdot Δt + \frac{1}{2}α_2 \cdot Δt^2 \quad ή \quad x_δ = 20 - 4(t-2) + \frac{1}{2}α_2 \cdot (t-2)^2 \ (SI) \qquad (8)$$

Όταν $υ_{δοκ} = 0$, $x_δ = 10m$.

Έτσι, οι σχέσεις (7) και (8) γίνονται αντίστοιχα:

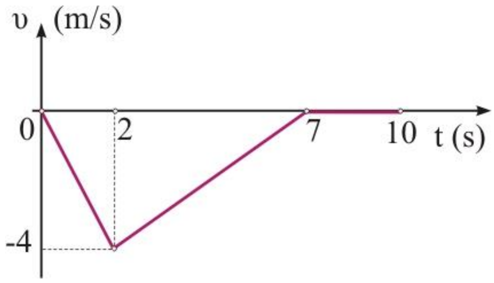
$$0 = -4 + α_2(t-2) \ (SI) \quad , \quad 10 = 20 - 4(t-2) + \frac{1}{2}α_2 \cdot (t-2)^2 \quad (SI)$$

Η λύση του συστήματος των δύο τελευταίων εξισώσεων δίνει:

$α_2 = 0,8\frac{m}{s^2}$ και t=7s

Άρα, η συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα της δοκού σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$\upsilon_{\delta o\kappa} = \begin{cases} -2t\,(SI) & 0 \le t \le 2s \\ -4 + 0{,}8(t-2)\,(SI) & 2s \le t \le 7s \end{cases}$$



Το διάγραμμα ταχύτητας- χρόνου για τη δοκό φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Τα θέματα επιμελήθηκαν οι **Λάλος Νικόλαος** και **Ποντικός Ηλίας**, Φυσικοί.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τον **Παλόγο Αντώνιο,** Φυσικό.